PRIMER PRETORNEO 2009
JUVENIL

1. Pablo tiene 10 cajas con lápices de colores. Las cantidades de lápices en todas las cajas son distintas, y en cada caja todos los lápices son de distinto color. Demostrar que es posible elegir un lápiz de cada caja de modo que los 10 lápices sean de distinto color.

4 PUNTOS

2. Ariel elige 25 números enteros del 1 al 50 inclusive y Miguel elige 25 números enteros del 51 al 100 inclusive. Entre los números elegidos no hay repetidos ni tampoco hay dos números que difieran en 50. Determinar si con esta información es posible calcular la suma de los 50 números elegidos por los dos chicos. Si la respuesta es afirmativa, calcular la suma. Si no, explicar el porqué.

5 PUNTOS

3. Hallar tres números enteros positivos distintos tales que uno de ellos sea el promedio de los otros dos y que el resultado de multiplicar los tres números sea igual a un número entero positivo elevado a la potencia 2009.

5 PUNTOS

4. En una pista recta se entrenan varios corredores todos a velocidades distintas pero constantes. Todos comienzan al mismo tiempo y desde un mismo extremo de la pista. Cada uno de ellos, cuando llega a un extremo de la pista de inmediato da vuelta y corre en la otra dirección a la misma velocidad. Un tiempo después del comienzo, todos los corredores se encuentran en un mismo punto de la pista. Demostrar que esto volverá a ocurrir en otro momento.

5 PUNTOS

PRIMER PRETORNEO 2009
MAYOR

1. Fede distribuyó galletas en algunas cajas y anotó la cantidad de galletas de cada caja. Si un mismo número figuró más de una vez, lo anotó sólo una vez. Luego, Germán toma una galleta de cada caja y las coloca en el plato número 1. En el paso siguiente, toma una galleta de cada caja aun no vacía y las coloca en el plato número 2. Continúa con este procedimiento hasta que las cajas queden todas vacías. Hecho esto, Germán anota la cantidad de galletas de cada plato. Si hay platos con la misma cantidad de galletas, anota la cantidad una sola vez. Demostrar que Fede y Germán han anotado la misma cantidad de números.

4 PUNTOS

2. Sea *ABC* un triángulo acutángulo con sus tres vértices en una circunferencia de radio 2. Demostrar que se pueden elegir puntos *E*, *F*, *G* en los arcos AB, BC, CD, respectivamente, tales que el valor del área del hexágono *AEBFCG* sea igual al valor del perímetro del triángulo *ABC*.

5 PUNTOS

3. Hallar todos los números reales *a*, *b*, *c*, *d*, *e* que satisfacen simultáneamente las siguientes igualdades

$$\sqrt{a}+\sqrt{b+c+d+e}=\sqrt{b}+\sqrt{a+c+d+e}=\sqrt{c}+\sqrt{a+b+d+e}=$$
$$=\sqrt{d}+\sqrt{a+b+c+e}=\sqrt{e}+\sqrt{a+b+c+d}\ ;$$
$$a-b=1.$$

5 PUNTOS

4. Dados 5 enteros positivos distintos que forman una progresión aritmética, decidir si es posible que el producto (multiplicación) de los 5 enteros sea igual a la potencia 2009 de un número entero.
ACLARACIÓN: Una progresión aritmética es una secuencia de números tales que cada uno se obtiene del anterior sumando un cierto número fijo *d*, llamado diferencia o razón de la progresión.

5 PUNTOS